令和4年度10月・令和5年度4月入学者選抜試験問題

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科（博士前期課程）

数物科学専攻

【　一　般　選　抜　】

試験科目名　：　筆記試験（数　学）

令和４年７月９日（土）

試験時間：１０：００〜１２：００

注意事項

（１）解答用紙の指定された箇所に受験番号，氏名，問題番号を記入すること。
受験番号は，受験票の受験番号欄に記入してあるとおりに書くこと。
指定された以外の箇所には，受験番号・氏名を絶対に書かないこと。

（２）問題冊子及び解答用紙は，指示があるまで開いてはならない。

（３）全問解答すること。

（４）問題１から問題３を問題ごとに別々の解答用紙を使って解答すること。
解答用紙（両面）は３枚ある。
解答用紙は必要に応じて追加できるので，手を挙げて知らせること。

（５）問題冊子に乱丁，落丁，印刷不鮮明など不備があった場合は，挙手をして試験監督者に申し出ること。

（６）問題冊子の総ページ数　--------------------　５ページ
問題ページ　--------------------　第３〜第５ページ（第１，第２ページは白紙）

（７）試験終了後，この問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 空でない２つの集合 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ について考える．X の空でない２つの部分集合 A, B について，$A \cap B$ が空集合ではないとする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(A \cap B) \subset \big(f(A) \cap f(B)\big)$ であることを示せ．

(2) $X = Y = \mathbf{R}$ とする．$f(A \cap B) \neq \big(f(A) \cap f(B)\big)$ であるような f, A, B の例を示せ．

(3) 合成写像 $g \circ f : X \to X$ が恒等写像となるような写像 $g : Y \to X$ が存在するとき，$f(A \cap B) = \big(f(A) \cap f(B)\big)$ であることを示せ．

$\boxed{2}$ a は $0 < a < 1$ を満たす実数とする．行列

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+a & 1-a \\ 1-a & 1+a \end{pmatrix}$$

を用いて，定義域が $\mathbf{R}^2$ である実数値関数 f を

$$f(x,y) = {}^t\boldsymbol{v}A\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた A の固有値を λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \leq \lambda_2)$ とする．2×2 行列 P を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と変数変換したとき，$f(x,y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$ となるような行列 P を求めよ．

(3) $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする．

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy$$

を求めよ．

$\boxed{3}$ 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において原点を O とおく．

$$\mathbf{R}^* = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0\}$$

の上の点 A に対して，2 点 A,O を通る直線を ℓ_{A} と書く．$\mathbf{R}^*$ の上の 2 点 A,B について関係 A $\sim$ B を

$$\mathrm{A} \sim \mathrm{B} \iff \ell_{\mathrm{A}} \text{ と } \ell_{\mathrm{B}} \text{ が一致する}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) 関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ．

(2) $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{R}^*$ をとる．A の座標を (a_1, a_2)，B の座標を (b_1, b_2) とするとき，“ A $\sim$ B となる ” ことと “ $a_1 b_2 = a_2 b_1$ が成り立つ ” ことが同値であることを示せ．

(3) $\mathrm{A} \in \mathbf{R}^*$ に対して，集合 C_{A} を $C_{\mathrm{A}} = \{\mathrm{B} \in \mathbf{R}^* \mid \mathrm{A} \sim \mathrm{B}\}$ と定める．集合

$$S = \{C_{\mathrm{A}} \mid \mathrm{A} \in \mathbf{R}^*\}$$

と実数全体の集合との間に全単射が存在することを示せ．